

Poznámka k rozšiřování lipschitzovských funkcí

Metoda rozšíření lipschitzovských funkcí v 3.2.8 dá trochu obecnější tvrzení, které může být vhodné v některých situacích.

Věta. Konstrukce lipschitzovských funkcí

Nechť (X, ρ) je neprázdný pseudometrický prostor, $A \subset X, A \neq \emptyset$ a $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$. Pak následující funkce jsou lipschitzovské pro libovolné $k > 0$ na podprostorech v (X, ρ) , kde mají vlastní hodnoty:

$$\psi(x) = \sup\{\varphi(z) - k\rho(x, z); z \in A\}, \quad \tau(x) = \inf\{\varphi(z) + k\rho(x, z); z \in A\}.$$

Platí $\tau \leq \varphi \leq \psi$ na A . Nerovnost $\psi \leq \tau$ na A platí, právě když φ je lipschitzovská s konstantou k (potom $\psi = \varphi = \tau$ on A , $\psi \leq \tau$ na X a ψ, τ mají vlastní hodnoty na celém X).

Důkaz. Platí $\psi(x) > -\infty, \tau(x) < \infty$. Vezmeme libovolné $x, y \in X$ a např. $\infty > \psi(x) > \psi(y)$. Chceme dokázat $\psi(x) - \psi(y) \leq k\rho(x, y)$. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $z_0 \in A$, že $\varphi(z_0) - k\rho(x, z_0) > \psi(x) - \varepsilon$. Pak

$$\psi(x) - \psi(y) < (\varphi(z_0) - k\rho(x, z_0) + \varepsilon) - (\varphi(z_0) - k\rho(y, z_0)) = k(\rho(y, z_0) - \rho(x, z_0)) + \varepsilon \leq k\rho(x, y) + \varepsilon,$$

což implikuje dokazovanou nerovnost. Postup pro funkci τ je podobný.

Nerovnosti $\tau(x) \leq \varphi(x) \leq \psi(x)$ pro $x \in A$ dostaneme dosazením $z = x$ do definic funkcí ψ, τ . Pokud platí $\psi \leq \tau$ na A , je $\psi = \tau = \varphi$ na A a tedy φ je lipschitzovská s konstantou k . Dokážeme, že je-li φ lipschitzovská s konstantou k , je $\psi \leq \tau$ dokonce na X . Předpokládejme, že existuje $x \in X$, že $\psi(x) > \tau(x)$. Pak existují $u, v \in A$, že

$$\varphi(u) - k\rho(x, u) > \varphi(v) + k\rho(x, v) \Rightarrow \varphi(u) - \varphi(v) > k(\rho(x, u) + \rho(x, v)) \geq k\rho(u, v),$$

což je spor s lipschitzovskou vlastností funkce φ . Potom je $-\infty < \psi \leq \tau < \infty$ na X . □

Jako důsledek můžeme uvést speciální případ věty o vložení lipschitzovské funkce mezi dvě dané funkce.

Důsledek. Vložení lipschitzovské funkce

Nechť (X, d) je metrický prostor a $g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$ jsou omezená zobrazení, $g \leq h$. Jestliže $d(x, y) \geq g(y) - h(x)$ pro všechna $x, y \in X$, pak existuje lipschitzovská funkce $F : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ s vlastností $g \leq F \leq h$.

Důkaz. Definujeme $F(x) = \inf\{h(y) + d(x, y); y \in X\}$. Z definice je zřejmé (pro volbu $y = x$), že $F \leq h$. Ukážeme, že $F \geq g$. Předpokládejme opak, tj. existuje $x \in X$ s vlastností $F(x) < g(x)$. Z vlastností infima plyne existence y , že $h(y) + d(x, y) < g(x)$, což dává spor. □

Vlastnost $d(x, y) \geq g(y) - h(x)$ je trochu podivná. Dá se nahradit podmínkami, že množiny $h^{-1}((-\infty, r])$ a $g^{-1}([s, \infty))$ mají kladné vzdálenosti pro každé $r < s$. Důkaz je ovšem obtížnější. Z těchto podmínek snadno plyne Hahnova věta 6.4.2 (a tedy Tietzova věta 3.2.6), ale i rozšiřovací věta pro stejnoměrně spojitá zobrazení 3.2.7, která z Hahnovy věty neplyne. Použije se stejnoměrná spojitost lipschitzovských funkcí. Uvedený důsledek je speciálním případem obecné věty D. Preisse a J. Vilímovského pro uniformní prostory.